◈ 7. 순열(기본문제)

1. 서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때, 다음을 구하여라.
(1) 눈의 합이 6 또는 9가 되는 경우의 수
(2) 눈의 합이 4 이하가 되는 경우의 수

정답≫ (1) $5+4=9$ (2) 6가지

2. x, y가 각각 $-1\le x\le 1$, $-2\le y\le 2$인 정수라고 할 때, $x+y\le 2$인 경우의 수를 구하여라.

정답≫ 14가지
해설≫ $x+y>2$인 경우는 $x=1$, $y=2$뿐이다. $\therefore$ $3\times 5-1=14$(가지)

3. 어느 반의 50명 학생은 모두 물리와 화학 중 적어도 한 과목은 선택하고 있다. 35명이 물리를, 30명이 화학을 선택하고 있다. 이 때, 두 과목을 모두 선택한 학생은 몇 명인가?

정답≫ $35+30-50=15$(명)

4. $(a+b+c)(x+y)$를 전개할 때, 항의 개수를 구하여라.

정답≫ 6
해설≫ 경우의 수의 곱의 법칙 $3\times 2=6$ (개)

5. 72의 약수의 개수를 모두 구하여라.

정답≫ 12개
해설≫ 72를 소인수분해하면 $72=2^3\times 3^2$이다. 여기서, 2^3의 약수의 집합과 3^2의 약수의 집합을 각각 $A=\{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3\}$, $B=\{1,\ 3,\ 3^2\}$이라고 한다.
이 때, 한 자연수가 72의 약수일 필요충분조건은 집합 A의 한 원소와 집합 B의 한 원소의 곱인 것이다. 따라서, 구하는 약수의 개수는 곱집합 $A\times B$의 원소의 개수와 같다. 즉,
$n(A\times B)=n(A)\times n(B)=4\times 3=12$

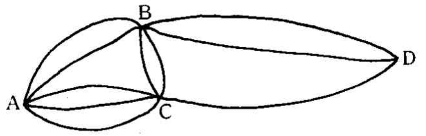
6. 540과 432의 공약수의 개수를 구하여라. 이 중 홀수는 몇 개인가?

정답≫ $\begin{cases}\text{공약수의 개수 : 12개}\\ \text{홀수의 공약수 : 4개}\end{cases}$
해설≫ $540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$ $432=2^4\cdot 3^3$이므로 최대공약수는 $2^2\cdot 3^3$

7. 무게가 $1g$, $2g$, $4g$, $8g$인 분동이 각각 1개씩 있다. 이들을 써서 몇 가지 무게를 달 수 있는가?

정답≫ 15가지

8. A, B, C, D의 4지점이 그림과 같이 서로 여러 개의 길로 연결되어 있다. A에서 출발하여 B또는 C를 지나거나, B와 C를 모두 지나 D로 가는 길은 모두 몇 가지인가? (단, 한 지점은 두 번 이상 지나지 않는다.)



정답≫ 23가지
해설≫ (i) A→B→D : $2\times2=4$
(ii) A→B→C→D : $2\times2\times1=4$
(iii) A→C→B→D : $3\times2\times2=12$
(iv) A→C→D : $3\times1=3$
∴ 전체 경로는 $4+4+12+3$ 23(가지)

9. 다음 값을 구하여라.
(1) ${}_6\mathrm{P}_3$ (2) ${}_5\mathrm{P}_5$ (3) $4!$ (4) $1!$

정답≫ (1) 120 (2) 120 (3) 24 (4) 1

10. ${}_n\mathrm{P}_2+4n=28$ 을 만족하는 n의 값은?
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

정답≫ ③
해설≫ ${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)$ 이므로 $n(n-1)+4n=28$ ∴ $n^2+3n-28=0$ ∴ $(n+7)(n-4)=0$
$n\geq2$ 인 정수이므로 $n-4=0$ ∴ $n=4$

11. 서로 다른 마을에 사는 다섯 친구 집을 돌아오자면 몇 가지 차례가 있는가 ?

정답≫ 120 (가지)
해설≫ 다섯 집을 일렬로 세우는 순열의 수와 같으므로 ${}_5P_5=5!=120$(가지)

12. 7명의 릴레이 선수 중에서 제1주자, 제2주자, 제3주자까지 3명을 선택하는 방법은 몇 가지인가?

정답≫ 210가지
해설≫ 7명 중에서 3명을 선택하여 일렬로 배열하여 첫 번째, 두 번째, 세 번째를 각각 제1주자, 제2주자, 제3주자로 정하면 된다. 따라서, 구하는 방법은 ${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$(가지)

13. 6명의 학생이 한 줄로 서는 방법은 몇 가지인가?

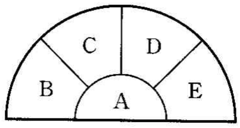
정답≫ ${}_6\mathrm{P}_6=720$(가지)

14. 남학생 4명, 여학생 3명이 한 줄로 서서 등산을 할 때, 다음 물음에 답하여라.
(1) 특정한 2명이 이웃하여 서는 방법은 몇 가지인가?
(2) 맨앞과 맨뒤에 남학생이 서는 방법은 몇 가지인가?

정답≫ (1) 1440가지 (2) 1440가지

해설≫ (1) 특정한 2명을 이웃하여 서는 방법은 ${}_2P_2$가지이다. 이 한 쌍과 나머지 5명의 순열의 수는 ${}_6P_6$이다. 따라서, 구하는 방법의 가지수는 ${}_2P_2\times{}_6P_6=2!\times6!=1440$(가지)
(2) 4명의 남학생 중에서 2명을 앞뒤에 세우는 방법의 가지 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$
이 각각에 대하여 나머지 5명이 그 사이에 서는 방법의 가지 수는 ${}_5P_5$이다.
${}_4P_2\times{}_5P_5=12\times5!=12\times120=1440$(가지)

15. 그림과 같이 구분된 A, B, C, D, E의 5부분에 서로 다른 6가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 여러 번 써도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠하려고 할 때, 칠하는 방법의 수는?



① 1440 ② 1920 ③ 2320 ④ 2560 ⑤ 3690

정답≫ ②
해설≫ A부분에 칠하는 방법은 6가지, 이 때 B에 칠하는 방법은 A에 칠한 색을 제외한 5가지이고
C에는 A, B에 칠한 색을 제외한 4가지, D에는 A, C에 칠한 색을 제외한 4가지, E에는 A, D에 칠한 색을 제외한 4가지이므로 $6\times5\times4\times4\times4=1920$(가지)

16. 남자 5명, 여자 5명의 탁구 선수가 혼합 복식팀을 짜는 방법의 수는?

① $5!$ ② $5!\times2$ ③ $5!\times2!\times2$ ④ $5!\times5!\times\frac{1}{2}$ ⑤ $5!\times5!$

정답≫ ①
해설≫ 남자 선수 5명과 여자선수 5명을 일대일 대응으로 짝짓기하는 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는 $5!$이다.

17. 정오각뿔의 옆면을 5가지 색으로 칠하는 방법은 모두 몇가지인가?

정답≫ $(5-1)!=24$(가지)

18. 5명의 가족이 원형 식탁에 둘러 앉을 때 부모가 이웃하여 앉는 방법은 몇 가지인가?

정답≫ 12가지
해설≫ 이웃한 부모를 한 묶음으로 보고 나머지 가족 세 명과 함께 원탁에 앉는 방법의 가지 수는 $(4-1)!=3!=6$
이들 각각에 대하여 부모가 자리바꿈하여 앉는 방법은 ${}_2P_2=2!=2$(가지)이므로 구하는 가지수는
$(4-1)!\cdot{}_2P_2=6\times2=12$

19. 서로 다른 색의 7개의 공을 탁자 위에 원형으로 배열하는 방법은 몇 가지인가?

정답≫ $(7-1)!=720$(가지)

20. 정오각기둥의 옆면을 5가지 색으로 칠하는 방법은 몇 가지인가? 단, 두 밑면은 구별하

지 않는 것으로 한다.

정답≫ $\dfrac{4!}{2}=12$(가지)

21. 5명의 학생을 A, B, C 세 모임에 가입시키는 방법은 몇 가지인가? 단, 각 학생은 한 모임에만 가입할 수 있다.

정답≫ 243가지
해설≫ 5명의 학생을 1, 2, 3, 4, 5라고 하자. 아래 표와 같이 1, 2는 A, 3은 B, 4, 5는 C에 가입되었다면, 이에 대하여 순열 AABCC가 대응된다.
이것은 서로 다른 세 모임 A, B, C에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 중복순열 중의 하나이다. 따라서, 구하는 가지 수는 3개에서 5개를 뽑는 중복순열과 같다. 즉, ${}_3\Pi_5=3^5=243$(가지)

학생	1	2	3	4	5
모임					

22. 6통의 편지를 세 우체통에 넣는 방법은 몇 가지인가?

정답≫ 729가지
해설≫ ${}_3\Pi_6=3^6=729$(가지)

23. 중복을 허락하여 0, 1, 2, 3의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리의 수는 몇 가지
인가?

정답≫ 48가지
해설≫ ${}_4\Pi_3-{}_4\Pi_2=48$(가지)

24. 서로 다른 5개의 과자를 다음과 같이 두 사람이 나누어 가지는 방법은 몇 가지인가?
(1) 어느 한 사람은 한 개도 못받는 경우가 있어도 된다.
(2) 둘 다 적어도 한 개는 받는다.

정답≫ (1) ${}_2\Pi_5=2^5=32$가지 (2) 30가지

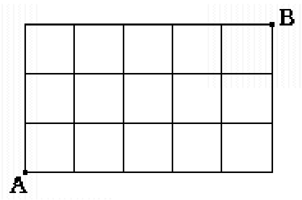
25. 5개의 문자 a, a, a, b, b를 모두 사용하여 일렬로 나열하는 순열에 대하여 다음에 답하여라.
(1) 공식을 이용하여 순열의 수를 구하여라.
(2) 순열을 모두 써 보아라.

정답≫ (1) 10가지
(2) $aaabb$, $aabba$, $abbaa$, $bbaaa$, $ababa$, $abaab$, $aabab$, $babaa$, $baaba$, $baaab$

26. SUCCESS의 7개의 문자를 일렬로 세우는 방법의 가지수를 구하여라.

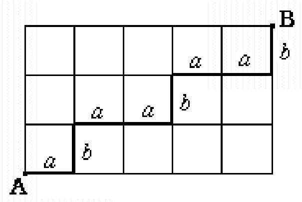
정답≫ 420가지
해설≫ SUCCESS 중 S가 3개, C가 2개이므로 일렬로 세우는 방법의 가지 수는 $\dfrac{7!}{2!3!}=420$ (가지)

27. 아래의 그림과 같이 도로가 나있는 지역이 있다. A지점에서 B지점으로 가는데 최단 거리로 가는 방법은 몇 가지가 있는가?

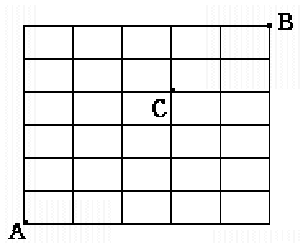


정답≫ 56가지

해설≫ A에서 B까지 최단거리로 가기 위해서는 오른쪽으로 5구간, 위쪽으로 3구간 가면 된다. 오른쪽으로 한 구간 가는 것을 a, 위쪽으로 한 구간 가는 것을 b로 나타내면 최단거리로 가는 방법은 $abaabaab$등으로 표시된다. 따라서 구하는 방법의 수는 a를 5개, b를 3개 포함한 순열의 수와 같다. 그러므로 구하는 가지 수는 $\frac{8!}{5!3!}=56$(가지)



28. 아래의 그림과 같이 도로가 나 있는 지역이 있다. A지점에서 다음과 같이 가는 방법은 몇 가지 있는가?
(1) C지점을 거쳐서 B지점까지 최단거리로 가는 방법
(2) C지점을 지나지 않고, B지점까지 최단 거리로 가는 방법



정답≫ (1) 210가지 (2) 252가지

해설≫ (1) $\frac{7!}{3!4!}\cdot\frac{4!}{2!2!}=210$(가지) (2) $\frac{11!}{5!6!}-210=252$(가지)

29. 330112, 231310, …와 같이, 6자리의 짝수로서 3이 두 개, 2가 한 개, 1이 두 개, 1이 두 개, 0이 한 개 들어 있는 것은 모두 몇 개인가?

정답≫ 54개

30. $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$일 때, A에서 B로의 함수 $f: A\to B$에 대하여 다음 물음에 답하여라.
(1) 함수는 모두 몇 개 있는가?
(2) 치역이 B인 함수는 모두 몇 개 있는가?

정답≫ (1) 1024개 (2) 240개

해설≫ (1) 4개에서 5개 뽑는 중복순열이므로 ${}_4\Pi_5 = 4^5 = 1024$(개)

(2) 치역이 {1, 2, 3, 4}이어야 하므로 나머지 하나는 1, 2, 3, 4중 한 개만 추가하면 된다. 1을 추가할 때 1, 1, 2, 3, 4순열의 수는 $\frac{5!}{2!}$이고 2, 3, 4에 대해서도 같으므로 $4\times\frac{5!}{2!} = 240$(개)