

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

1. ④

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_2 b} + \frac{1}{\log_4 b} + \frac{1}{\log_8 b} \\ &= \log_b 2 + \log_b 4 + \log_b 8 \\ &= \log_b 64 \\ & \frac{2}{\log_a b} = 2\log_b a = \log_b a^2 \\ & \therefore \log_b 64 = \log_b a^2 \\ & 64 = a^2 \\ & a = 8 (\because a > 0) \end{aligned}$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

2. ①

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^3 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= f'(1) \times \frac{2}{3} \\ f'(x) &= 2x + 1 \text{ 이므로} \\ f'(1) &= 3 \\ \therefore 3 \times \frac{2}{3} &= 2 \end{aligned}$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

3. ①

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + ax \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} \times 2 \\ &= f'(3) \times 2 = 10 \\ f'(3) &= 5 \text{ 이어야 한다.} \\ f'(x) &= 2x + a \\ f'(3) &= 6 + a = 5 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

4. ①

$$(x^3 + 1)f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{2} \right) \quad (x \neq 1)$$

모든 실수 x 에 대하여 연속이라 했으므로

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^3 + 1} \left(\frac{2x - x^2(x-1)}{2(x-1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^3 + 1} \times \frac{-x^3 + x^2 + 2x}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x(x-2)(x+1)}{2(x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)} \\ &= \frac{-3}{2 \cdot 3 \cdot (-2)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

5. ③

$$f(x) = x^3 - x + \int_0^2 f(t) dt$$

$$\int_0^2 f(t) dt = a \text{ 라 하자.}$$

$f(x) = x^3 - x + a$ 를 치환한 식에 대입하면

$$\int_0^2 (t^3 - t + a) dt = a$$

$$\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + at \right]_0^2 = a$$

$$\therefore a = -2$$

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

$$\begin{aligned} f(3) &= 27 - 3 - 2 \\ &= 22 \end{aligned}$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

6. ①

$$f(x) = ax + 2, \quad g(x) = 2x$$

$$f(g(4)) = f(8) = 8a + 2$$

$$g(f(3)) = g(3a + 2) = 6a + 4$$

$$f(g(4)) = g(f(3)) \text{이므로}$$

$$8a + 2 = 6a + 4$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

7. ③

$$f(3x-1) = 9x-5$$

양변에 $x = \frac{2}{3}$ 를 대입하면

$$f(1) = 9 \times \frac{2}{3} - 5 = 1 \text{ 이 된다.}$$

$f(1) = 1$ 이므로 역함수의 성질에 의하여 $f^{-1}(1) = 1$

$$\text{따라서 } f(1) + f^{-1}(1) = 1 + 1 = 2$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

8. ④

100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누어 나머지가 2인 수들은

$$3 \times 1 - 1 = 2$$

$$3 \times 2 - 1 = 5$$

$$3 \times 3 - 1 = 8$$

...

$$3 \times 33 - 1 = 98$$

이 수들의 총합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{33} (3k-1) &= 3 \times \frac{33 \times 34}{2} - 33 \\ &= 33(51-1) \\ &= 33 \times 50 \\ &= 1650\end{aligned}$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

9. ②

영어와 수학을 모두 듣는 학생 수를 x 라 하면

영어만 듣는 학생 수는 $54 - x$, 수학만 듣는 학생 수는 $47 - x$ 이다.

$(54 - x) + x + (47 - x) = 80$ 이므로

$$x = 21$$

따라서 수학만 신청한 학생 수는

$$47 - x = 47 - 21 = 26 \text{명이다.}$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

10. ④

$$x = 4^{\frac{1}{6}} + 4^{-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$$

양변을 세제곱하면

$$\begin{aligned} x^3 &= \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \\ &= 2 + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} + 2^{-1} \\ &= 2 + 3\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right) + 2^{-1} \\ &= \frac{5}{2} + 3x \end{aligned}$$

$$x^3 - 3x = \frac{5}{2} \text{ 이므로}$$

$$2x^3 - 6x = 5$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

11. ④

$$(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 2) - 3$$

$x^2 + 2x = t$ 라고 치환하면

$$t(t - 2) - 3$$

$$= (t - 3)(t + 1)$$

$$= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 1)$$

$$= (x + 3)(x - 1)(x + 1)^2$$

$$= (x + a)^2(x - 1)(x + b)$$

따라서 $a = 1, b = 3$

따라서 $ab = 3$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

12. ③

$x^2 - 4x + 4 - k^2 \leq 0$ 의 정수인 해의 합이 14이다. 를 풀라 했으므로

$(x - (2 + k))(x - (2 - k)) \leq 0$ 이므로

$2 - k \leq x \leq 2 + k$ 이다.

$k = 3$ 이어야 $-1 \leq x \leq 5$ 가 되어야 모든 정수 x 의 합을 구하면

$(-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 14$ 가 된다.

따라서 $k = 3$ 이다.

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

13. ②

자연수의 분할에 해당하는 문제이다.

$$\begin{aligned}8 &= 5 + 1 + 1 + 1 \\&= 4 + 2 + 1 + 1 \\&= 3 + 3 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2 + 1 \\&= 2 + 2 + 2 + 2\end{aligned}$$

총 5가지이다.

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

14. ②

A, B, C 에게 나누어 주는 노트의 개수를 각각 x, y, z 개라고 하면

$x + y + z = 12$ 라 할 수 있다.

$x \geq 1, y \geq 3, z \geq 2$ 인 정수이므로

$x - 1 \geq 0, y - 3 \geq 0, z - 2 \geq 0$ 이다.

$x - 1 = X, y - 3 = Y, z - 2 = Z$ 로 치환하여 식을 정리하면

$(X + 1) + (Y + 3) + (Z + 2) = 12$ (X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)

$X + Y + Z = 6$ (X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)

이 되므로

정답은 ${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$ 이다.

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

15. ④

	남	여	T
중국어	12	6	18
일본어	8	10	18
T	20	16	36

이 학급에서 한 학생이 중국어 수업을 받는다고 할 때, 이 학생이 남학생일 확률은

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3} \text{ 이다.}$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

16. ①

$f(x) = x^4 + 4x - a^2 + 4a + 8$ 일 때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 4 \\ &= 4(x^3 + 1) \\ &= 4(x+1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

항상 $x^2 - x + 1 > 0$ 이므로 $x = -1$ 에서 극소이자 최소이다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 되려면

$f(x)$ 의 최솟값인 $f(-1) = 1 - 4 - a^2 + 4a + 8 > 0$ 이어야 한다.

$$f(-1) = -(a-5)(a+1) > 0$$

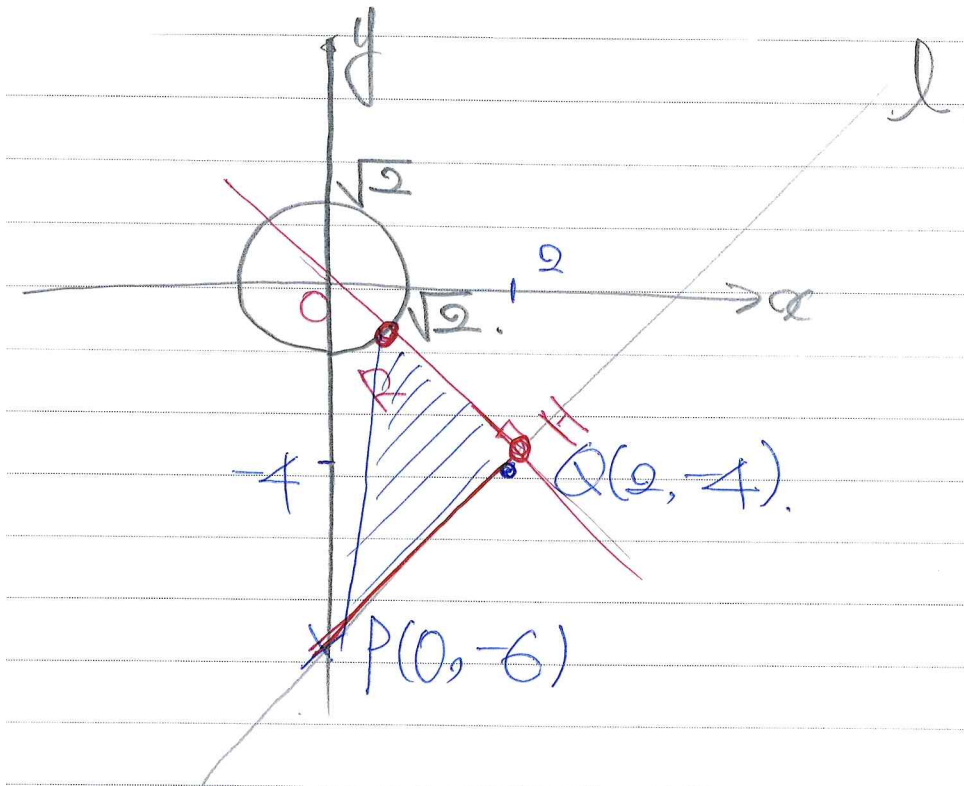
$-1 < a < 5$ 이다.

모든 정수 a 값의 합은

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{이 된다.}$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

17. ①



원 위의 점 R이 위의 그림과 같을 때 $\triangle PQR$ 의 높이 \overline{RH} 가 최소가 되므로 $\triangle PQR$ 의 넓이가 최소가 된다.

$$l: y = x - 6$$

$$\overline{OH}: (0, 0) \sim x - y - 6 = 0 \rightarrow \overline{OH} = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \overline{RH} &= \overline{OH} - \overline{OR} \\ &= 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{따라서, } \triangle PQR \text{의 최소 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

18. ③

$$z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$$

$$z-1=-i$$

양변을 제곱하면

$$z^2 - 2z + 1 = -1$$

$$z^2 - 2z = -2$$

$$\text{따라서 } z^2 - 2z + 3 = 1$$

<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

19. ②

$f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $R(x)$ 이므로

$f(x) = (x-1)(x-2)^2 Q(x) + R(x)$ 이다. 삼차식으로 나누었기에 $R(x)$ 는 이차 이하의 식이므로 $R(x) = ax^2 + bx + c$ 라 할 수 있다.

$f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $(x+3)$ 이므로

$f(x) = (x-1)(x-2)^2 Q(x) + a(x-2)^2 + (x+3)$ 이 된다.

$f(x)$ 를 $(x-1)$ 로 나눈 나머지는 5이므로 나머지 정리에 의하여 $f(1) = 5$ 가 된다.

$$f(1) = a + 4 = 5$$

$$a = 1$$

$$R(x) = (x-2)^2 + (x+3)$$

$$\text{따라서 } R(2) = 5$$

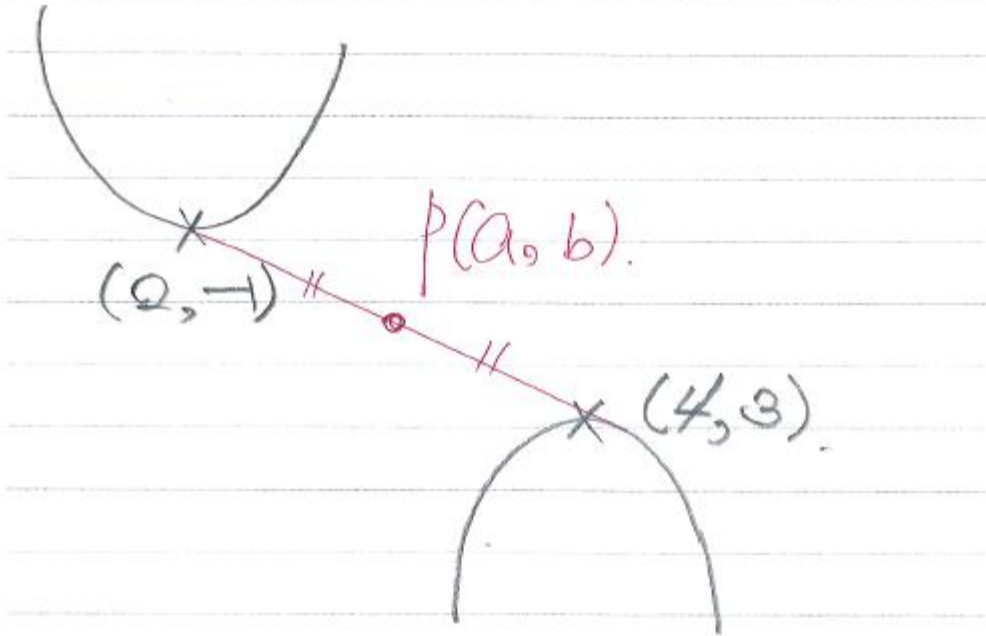
<2017년 6월 24일 서울시 공무원 수학 해설지>

20. ③

두 이차함수가 $P(a, b)$ 대칭이므로 각각의 꼭짓점이 $P(a, b)$ 대칭이다.

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1 \rightarrow \text{꼭짓점의 좌표} : (2, -1)$$

$$y = -x^2 + 8x - 13 = -(x - 4)^2 + 3 \rightarrow \text{꼭짓점의 좌표} : (4, 3)$$



따라서 $P(a, b)$ 는 $(2, -1)$ 과 $(4, 3)$ 의 중점이므로 $(3, 1)$ 이 되어야 한다.

$$a = 3, b = 1$$

따라서 $a + b = 4$ 이다.