#1. ④

$$\frac{1}{\log_2 b} + \frac{1}{\log_4 b} + \frac{1}{\log_8 b}$$

$$= \log_b 2 + \log_b 4 + \log_b 8$$

$$= \log_b 64$$

$$\frac{2}{\log_a b} = 2 \cdot \log_b a = \log_b a^2$$

$$\therefore \log_b 64 = \log_b a^2$$

$$64 = a^2$$

$$a = 8 \ (\because a > 0)$$

#2 ①

$f(x) = x^2 + x + 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^3 - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}$$

$$= f'(1) \times \frac{2}{3}$$

$f'(x) = 2x + 1$ 이므로

$f'(1) = 3$

$\therefore 3 \times \frac{2}{3} = 2$.

#3 ①

$f(x)=x^2+ax$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+2h)-f(3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0} \frac{f(3+2h)-f(3)}{2h} \times 2$

$=f'(3)\times 2 = 10$

$f'(3)=5$ 이어야 한다.

$f'(x)=2x+a$

$f'(3)=6+a=5$.

$\therefore a=-1$.

#4. ①

$$(x^3+1)f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1}\left(\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{2}\right) \qquad (x \neq 1)$$

모든 실수 x에 대하여 연속이라 했으므로,

$$f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x)$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{x^3+1}\left(\frac{2x - x^2(x+1)}{2(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{x^3+1} \times \frac{-x^3+x^2+2x}{2(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-x(x-2)\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{-\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}(-2)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

#5. ③

$$f(x) = x^3 - x + \underbrace{\boxed{\int_0^2 f(t)\,dt}}_{=a}.$$

a 라 하자.

$f(x) = x^3 - x + a$. 대입하면.

$$\int_0^2 (t^3 - t + a)\,dt = a$$

$$\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + at\right]_0^2 = a$$

$$4 - 2 + 2a = a$$

$$\therefore a = -2.$$

$$f(x) = x^3 - x - 2.$$

$$f(3) = 27 - 3 - 2$$

$$= 22.$$

#6 ①

$f(x)=ax+2, \quad g(x)=2x$

$f(g(4))=f(8)=8a+2$

$g(f(3))=g(3a+2)=6a+4$

$8a+2=6a+4$

$2a=2$

$\therefore a=1$

#7 ③

$f(\underline{3x-1}) = 9x-5.$

양변에 $x=\frac{2}{3}$ 대입.

$f(\underline{1}) = 9\times\frac{2}{3}-5$

$= 1.$

$f(1)=1$ 이므로

$f^{-1}(1)=1.$

$\therefore f(1)+f^{-1}(1) = 1+1 = 2.$

#8. ④

100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누어 나머지가 2인 수들은

$3\times1-1=2$

$3\times2-1=5$

$3\times3-1=8$

$\vdots$

$3\times33-1=98$

이 수들의 총합은

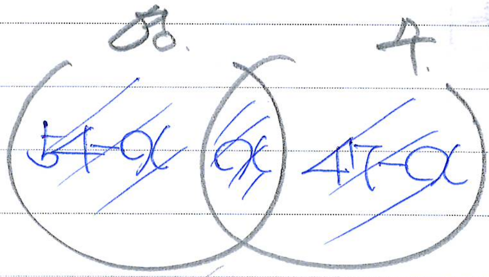
$$\sum_{k=1}^{33}(3k-1)=3\cdot\frac{33\cdot34}{2}-33$$

$$=33(51-1)$$

$$=33\times50$$

$$=1650$$

#9 ②



$$(54-x)+x+(47-x)=80$$

$$101-x=80$$

$$x=21$$

∴ 수학만 신청한 학생 수는

$$47-x=47-21$$

$$=26$$

#10. ④

$x = 4^{\frac{1}{6}} + 4^{-\frac{1}{6}}$

$= 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

양변을 세제곱하면

$x^3 = (2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}})^3$

$= 2 + \underline{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}}} + 2^{-1}$

$= 2 + 3(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}) + 2^{-1}$

$= \frac{5}{2} + 3x$

$x^3 - 3x = \frac{5}{2}$ 이므로

$2x^3 - 6x = 5.$

#11 ④

$(x^2+2x)(x^2+2x-2)-3$

$x^2+2x=t$ 로 치환하면

$t(t-2)-3$

$=t^2-2t-3$

$=(t-3)(t+1)$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x+1)$

$=(x+3)(x-1)(x+1)^2$

$=(x+a)^2(x-1)(x+b)$

$\therefore a=1,\ b=3$

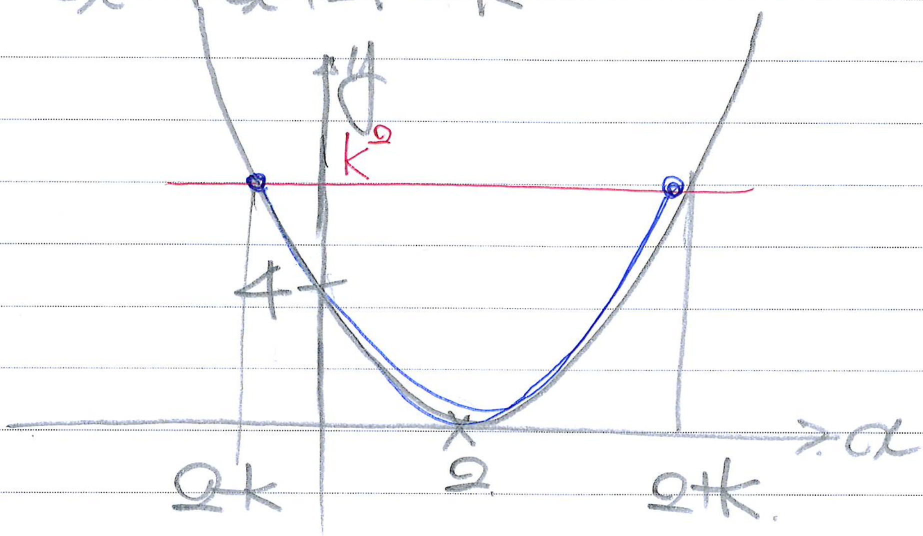
$ab=3$

#12 ③.

$x^2-4x+4-k^2 \le 0$ 의 정수인 해의

총합 14 $\quad \begin{matrix} -(2+k) \\ -(2-k) \end{matrix}$

$x^2-4x+4 \le k^2$.



$k=3$: $-1 \le x \le 5$ 가 되므로

모든 정수 x의 합 $=14$.

#13 ②

자연수의 분할

$8 = 5+1+1+1$

$= 4+2+1+1$

$= 3+3+1+1 = 3+2+2+1$

$= 2+2+2+2$

5가지.

#14. ②

A, B, C 에게 나누어 주는 노트의 개수를 각각 x, y, z 개라고 하면

$x+y+z=12$

$x\ge 1$, $y\ge 3$, $z\ge 2$ 이므로

$\underbrace{x-1}_{X}\ge 0$, $\underbrace{y-3}_{Y}\ge 0$, $\underbrace{z-2}_{Z}\ge 0$ 이다.

로 치환.

$(X+1)+(Y+3)+(Z+2)=12$

$X+Y+Z=6$. (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)

$\therefore {}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$.

#15. ④

	남	여	T
중국어	12	6	18
일본어	8	10	18
T	20	16	36

이 학급에서 한 학생이 중국어 수업을 받는다고 할 때, 이 학생이 남학생일 확률은?

$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

#16. ①

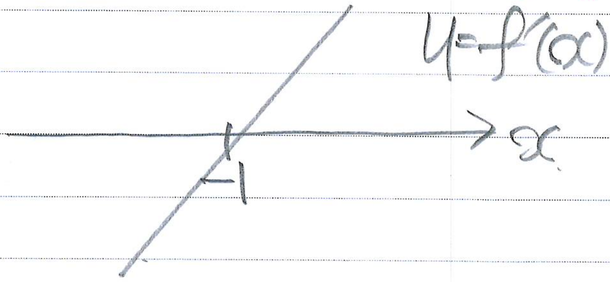
$f(x)=x^4+4x-a^2+4a+8$ 일 때

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$ 이어야 한다.

$f'(x)=4x^3+4$

$=4(x^3+1)$

$=4(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{>0\ (\text{항상})}$



$x=-1$ 일 때 극소이자 최소이다.

$f(x)>0$ 이어야 하므로 최솟값 $f(-1)>0$ 이어야 한다.

$f(-1)=1-4-a^2+4a+8>0$

$a^2-4a-5<0$

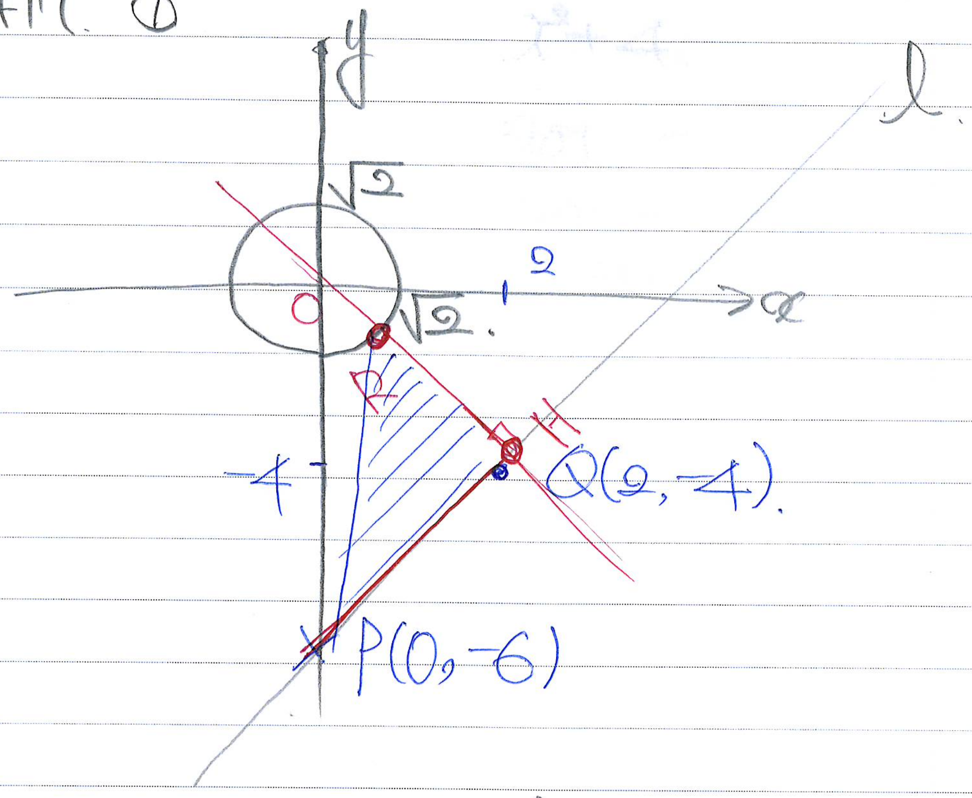
$(a-5)(a+1)<0$

$-1<a<5$

$\therefore$ 모든 정수 a값의 합은

$0+1+2+3+4=10$

#17. ①



위의 그림처럼 R이 위와 같을 때

$\triangle PQR$의 높이 $\overline{RH}$가 최소가 되므로

넓이가 최소가 된다.

l: $y = x - 6$. $\overline{OH}$: $(0, 0) \sim x - y - 6 = 0$

$\overline{OH} = \dfrac{|-6|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$\overline{RH} = \overline{OH} - \overline{OR}$

$= 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$

$\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$

$\therefore \triangle PQR$의 최소 넓이 $= \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$

$= 4$.

#18. ③

$z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$

$z-1 = -i$

양변을 제곱하면

$z^2-2z+1 = -1$

$z^2-2z = -2$

$\therefore z^2-2z+3 = 1$

#19 ②

$f(x)$를 $(x-1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는

$R(x)$ 이므로

ax^2+bx+c

$f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+R(x)$ 이다.

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는

$(x+3)$ 이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+\underbrace{a(x-2)^2+(x+3)}_{=R(x)}$

$f(x)$를 $(x-1)$로 나눈 나머지는 5 이므로

나머지 정리에 의하여 $f(1)=5$ 이다.

$f(1)=a+4=5$

$a=1$

$R(x)=(x-2)^2+(x+3)$

$R(2)=5$

#20. ③

두 이차함수가 P(a, b) 대칭이므로

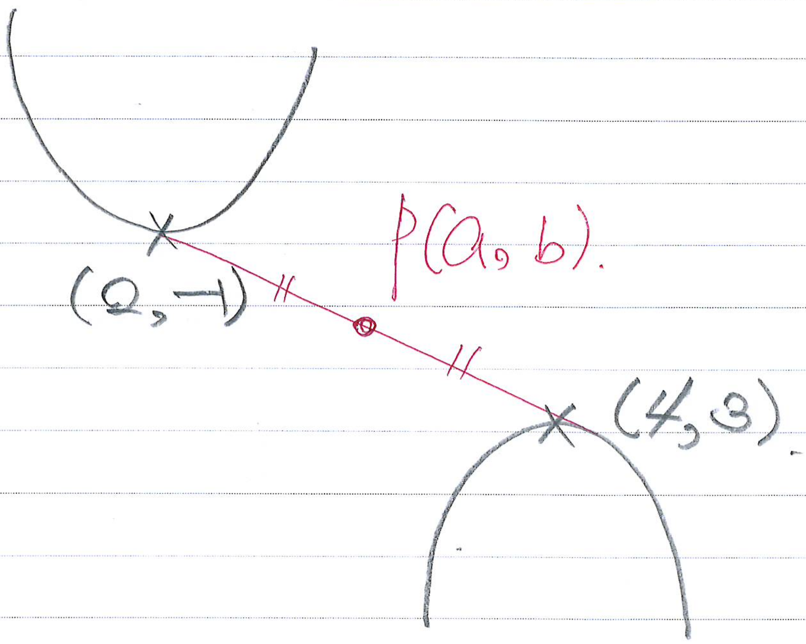
각각의 꼭짓점이 P(a, b) 대칭이다.

$y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ 꼭짓점 $(2, -1)$

$y = -x^2 + 8x - 13$

$= -(x^2 - 8x + 16 - 16) - 13$

$= -(x-4)^2 + 3$ 꼭짓점 $(4, 3)$



∴ P(a, b)는 $(2, -1)$과 $(4, 3)$의 중점이므로

$(3, 1)$

$a = 3,\ b = 1$

∴ $a + b = 4$