

제 1 장

집 합

1. 집합의 포함 관계
2. 집합의 연산
3. 부분집합의 개수
4. 집합의 연산법칙
5. 유한집합의 원소의 개수

이 단원의 학습법

집합의 포함관계, 연산 등을 다루는 문제와 특히 부분집합의 원리를 이용하는 문제에 대비하는 것이 좋다.



1 집합의 포함 관계

1. 집합과 원소

- (1) 집합 : 어떤 조건에 의하여 그 대상을 명확히 알 수 있는 것들의 모임
- (2) 원소 : 집합을 이루고 있는 대상 하나 하나

2. 집합과 원소의 관계

- (1) a 가 집합 A 의 원소일 때, a 는 집합 A 에 속한다고 하고, 이것을 기호로 $a \in A$ 와 같이 나타낸다.
- (2) a 가 집합 A 의 원소가 아닐 때, a 는 집합 A 에 속하지 않는다고 하고, 이것을 기호로 $a \notin A$ 와 같이 나타낸다.

3. 집합을 나타내는 방법

- (1) 원소나열법 : 어떤 집합에 속하는 모든 원소를 { } 안에 나열하여 집합을 나타내는 방법
- (2) 조건제시법 : 원소들이 가지는 공통된 성질을 조건으로 제시하여 집합을 나타내는 방법

4. 집합의 포함 관계

- (1) 부분집합 : 두 집합 A, B 에 대하여 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 속할 때, 즉 $a \in A$ 이면 $a \in B$ 일 때, 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이라 하고, 이것을 기호로 $A \subset B$ 또는 $B \supset A$ 와 같이 나타낸다.
- (2) 집합의 포함 관계 : 임의의 세 집합 A, B, C 에 대하여
 - ① $\phi \subset A, A \subset A$
 - ② $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$
 - ③ $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이면 $A \subset C$
- (3) 진부분집합 : 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 일 때, 집합 A 를 집합 B 의 진부분집합이라 한다.

해설(解説) 

1. 집합과 원소

우리가 어떤 모임을 생각할 때, 그 모임에 속하는 대상을 명확하게 구분할 수 있는 경우와 그렇지 않은 경우가 있다.

예를 들어,

- (1) 키가 180cm 이상인 고등학생들의 모임
- (2) 100 이하인 자연수들의 모임

의 경우 '키가 180cm 이상인 고등학생'이라는 조건과 '100 이하인 자연수'라는 조건은 그 기준이 명확하므로 모임에 속하는 대상을 분명하게 정할 수 있다. 그러나

- (3) 키가 큰 고등학생들의 모임
- (4) 100에 가까운 자연수들의 모임

의 경우 '키가 큰 고등학생'이라는 조건과 '100에 가까운 자연수'라는 조건은 그 기준이 명확하지 않으므로 모임에 속하는 대상을 분명하게 정할 수 없다. 이때, (1), (2)와 같이 주어진 조건에 의하여 그 대상이 분명하게 결정되는 모임을 집합(set)이라고 한다.

한편, 집합 '100 이하인 자연수들의 모임'은 1, 2, 3, ..., 100이라는 100개의 수로 이루어져 있다. 이때, 자연수

$$1, 2, 3, \dots, 100$$

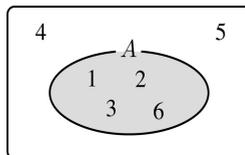
을 이 집합의 원소라고 한다.

일반적으로 한 집합이 주어질 때, 그 집합을 이루고 있는 대상 하나하나를 그 집합의 원소라고 한다.

2. 집합과 원소의 관계

오른쪽 그림에 대하여 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

- ① 3은 집합 A에 속하고, 4는 집합 A에 속하지 않는다.
- ② $3 \in A$, $4 \notin A$
- ③ $A = \{1, 2, 3, 6\} = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 약수}, x \text{는 자연수}\}$



3. 집합을 나타내는 방법

집합을 기호로 써서 나타내는 방법에는 원소나열법과 조건제시법이 있다.

원소나열법은 집합을 이루는 모든 원소를 { } 안에 나열하여 집합을 나타내는 방법이다. 예를 들어,

10보다 작은 양의 짝수의 집합

을 A 라고 하면 집합 A 는 원소 2, 4, 6, 8로 이루어져 있으므로

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

과 같이 나타내면 된다.

조건제시법은 집합을 결정짓는 조건을 $\{x \mid \}$ 의 꼴로 제시하여 집합을 나타내는 방법이다. 위의 집합 A 를 조건제시법으로 나타내면

$$A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 양의 짝수}\} \text{ 또는}$$

$$A = \{x \mid 0 < x < 10, x \text{는 짝수}\}$$

와 같다.

일반적으로 집합 $\{x \mid p(x)\}$ 는

조건 $p(x)$ 를 만족하는 x 전체의 집합

을 가리킨다. 특히, 조건제시법은

100보다 큰 실수의 집합 D , 100 이하의 유리수의 집합 E

와 같이 원소나열법으로는 나타낼 수 없는 집합을 나타낼 때 매우 유용하다. 이때, 두 집합 D, E 는

$$D = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{보다 큰 실수}\} \text{ 또는 } D = \{x \mid x > 100, x \text{는 실수}\}$$

$$E = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{이하의 유리수}\} \text{ 또는 } E = \{x \mid x \leq 100, x \text{는 유리수}\}$$

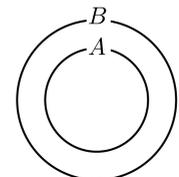
와 같이 나타내면 된다.

4. 집합의 포함 관계

두 집합 A, B 에서 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 속할 때, 즉 $x \in A$ 이면 반드시 $x \in B$ 일 때, 집합 A 를 집합 B 의 **부분집합**이라고 합니다. 예를 들어 두 집합

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

에서 집합 A 의 모든 원소 1, 2, 3이 집합 B 에 속하므로 A 는 B 의 부분집합이고,



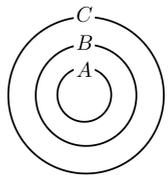
$A \subset B$
 A 는 B 의 부분집합

‘집합 A 는 집합 B 에 포함된다.’ 또는 ‘집합 B 는 집합 A 를 포함한다.’고 하며, 기호로는

$$A \subset B \text{ 또는 } B \supset A$$

로 나타낸다.

원이나 타원을 그려보면 집합 사이의 포함 관계를 쉽게 이해할 수 있는데, 이런 그림을 **벤 다이어그램**이라고 한다. 위의 예를 오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램으로 나타내어 보면 집합 A 가 집합 B 에 포함되어 있다는 것을 알 수 있다.



$A \subset B, B \subset C$ 이면 $A \subset C$

또한, 집합 A 가 집합 B 에 포함되고, 집합 B 가 집합 C 에 포함될 때, 이를 벤 다이어그램으로 그려보면 오른쪽 그림과 같이 집합 A 가 집합 C 에 포함되는 것을 알 수 있다.

5. 서로 같은 집합, 진부분집합

임의의 집합 A, B 에 대하여

$$A \subset B \text{ 이고 } B \subset A$$

즉, 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 속하고, 집합 B 의 모든 원소가 집합 A 에 속할 때, 두 집합 A, B 는 **서로 같다고** 하고, 기호로는 $A = B$ 로 쓴다.

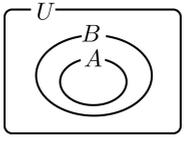
또, 임의의 집합 A, B 에 대하여

$$A \subset B \text{ 이고 } A \neq B$$

즉, 집합 A 의 모든 원소는 집합 B 에 속하고, 집합 B 에는 집합 A 에 속하지 않는 원소가 적어도 하나 있을 때, 집합 A 는 집합 B 의 **진부분집합**이라고 한다.

두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이면 다음이 모두 성립한다.

- (1) $A \cap B = A$
- (2) $A \cup B = B$
- (3) $A - B = \phi$
- (4) $B^C \subset A^C$
- (5) $A \cap B^C = \phi$
- (6) $A^C \cup B = U$



실력다지기 문제 I

집합의 포함관계

01 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $0 \in A$ ② $\emptyset \subset A$ ③ $\{0, 1\} \subset A$
- ④ $\{-1, 0\} \not\subset A$ ⑤ $\{0\} \in A$

02 $A = \{x \mid x^2 = 1, x \text{는 정수}\}$, $B = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$,
 $C = \{x \mid |x| \leq 1, x \text{는 정수}\}$ 일 때, 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는?

- ① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset A \subset C$
- ④ $C \subset A \subset B$ ⑤ $C \subset B \subset A$

03 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여
 $B = \{a + b \mid a \in A, b \in A\}$, $C = \{ab \mid a \in A, b \in A\}$
 로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $A \subset B = C$ ② $A = B = C$ ③ $A = C \subset B$
- ④ $B = C \subset A$ ⑤ $B \subset A = C$

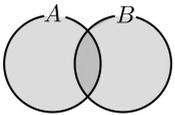
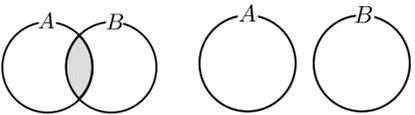
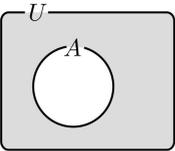
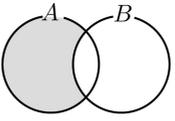
04 자연수를 원소로 가지는 집합 S 가 다음 조건을 만족할 때, 집합 S 의 개수는?

$x \in S$ 이면 $5 - x \in S$ 이다.

- ① 7 ② 6 ③ 5
- ④ 4 ⑤ 3

2 집합의 연산

1. 집합의 연산

(1) 합집합	(2) 교집합
$A \cup B = \{x x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$  $A \cup B$	$A \cap B = \{x x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$ 특히 $A \cap B = \emptyset$ 일 때, A 와 B 는 서로소  $A \cap B$ $A \cap B \neq \emptyset$
(3) 여집합	(4) 차집합
$A^c = \{x x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\}$  A^c	$A - B = \{x x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\} = A \cap B^c$  $A - B$

해설 (解說)

1. 합집합

두 집합 A, B 가

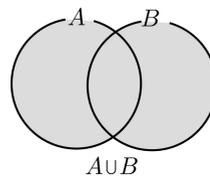
$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}$$

이라고 하자. 이때, A 와 B 중 적어도 어느 한 쪽에 속해 있는 원소로 이루어지는 집합은 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ 이다.

이와 같이 두 집합 A, B 에 대하여 A 와 B 중 적어도 어느 한 쪽에는 속해 있는 원소 전체로 이루어지는 새로운 집합을 A 와 B 의 **합집합**이라 하고, 기호로 $A \cup B$ 와 같이 나타낸다. 즉,

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$$

참고 \rightarrow ($A \cup B$ 를 'A union B'로 읽기도 한다.)



2. 교집합

두 집합 A, B 가

$$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 6\}$$

이라고 하자.

이때, A 와 B 에 공통으로 속해 있는 원소로 이루어지는 집합은 $\{1, 2\}$ 이다.

이와 같이 두 집합 A, B 에 대하여 A 와 B 에 공통으로 속해 있는 원소 전체로 이루어지는 새로운 집합을 A 와 B 의 **교집합**이라 하고, 기호로 $A \cap B$ 와 같이 나타낸다. 즉,

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{이고 } x \in B\}$$

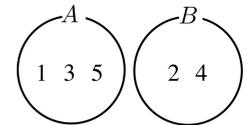
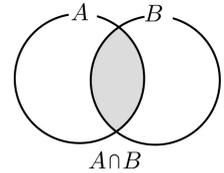
한편, 두 집합 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4\}$ 의 경우에는 공통으로 속해 있는 원소가 하나도 없다.

이와 같이 두 집합 A, B 에 대하여

$$A \cap B = \emptyset$$

일 때, A 와 B 는 **서로소**라고 한다.

참고 $(A \cap B$ 를 ‘ A intersection B ’로 읽기도 한다.)

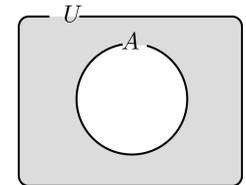


3. 여집합

집합 A 가 전체집합 U 의 부분집합일 때, U 에는 속하지만 A 에는 속하지 않는 원소로 이루어진 집합을 U 에 대한 A 의 **여집합**이라 하고, 기호로는 A^c 로 나타낸다.

$$A^c = \{x | x \in U \text{이고 } x \notin A\}$$

A^c 을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽의 어두운 부분과 같다. 차집합으로 표현하면 $U - A$ 로도 나타낼 수 있다.

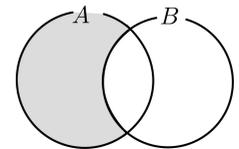


4. 차집합

두 집합 A, B 에 대하여 집합 A 에는 속하지만 집합 B 에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 A **차집합** B 라 하고, 기호로는 $A - B$ 로 나타낸다.

$$A - B = \{x | x \in A \text{이고 } x \notin B\}$$

$A - B$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽의 어두운 부분과 같다. $A - B$ 는 집합 A 에서 $A \cap B$ 를 제외한 부분으로 생각해도 된다.



Ⅰ 실력다지기 문제 Ⅰ

집합의 연산

01 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cap B^c = \emptyset$ 을 만족할 때, 다음 중 집합 $A \cap B$ 와 같은 집합은?

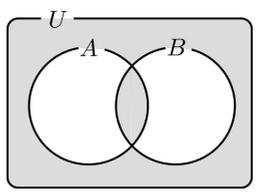
- ① A ② $A - B$ ③ B
- ④ $B - A$ ⑤ U

02 두 집합 $A = \{0, 1, a^2 + 1\}$,
 $B = \{-1, -a + 1, 2a + 3\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1, 2\}$
 일 때, 상수 a 의 값은?

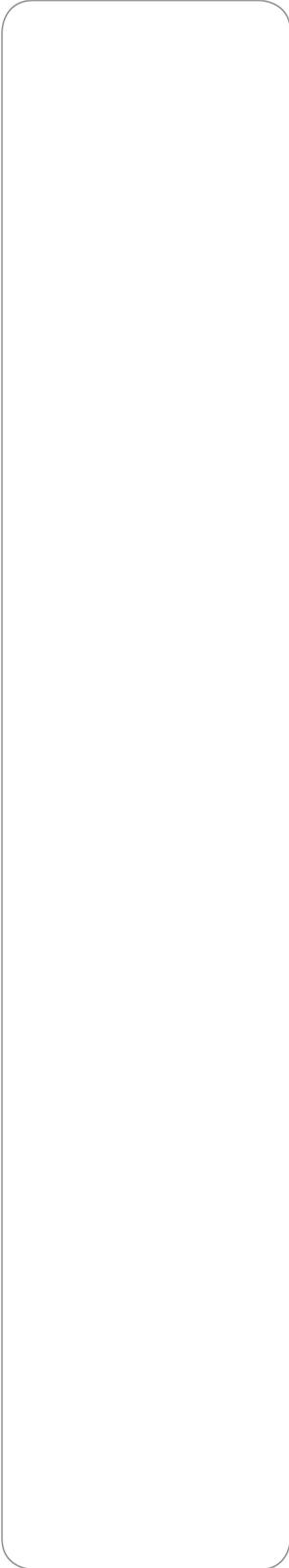
03 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A \cap B^c = \{1, 5\}$, $A^c \cap B = \{3, 8\}$, $A^c \cap B^c = \{6, 9\}$
 일 때, 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

04 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 집합으로 옳게 나타낸 것은?

- ① $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c)$
- ② $(A \cup B) \cup (A^c \cup B)$
- ③ $(A \cap B) \cup (A^c \cup B^c)$
- ④ $(A \cap B) \cup (A^c \cup B)$
- ⑤ $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

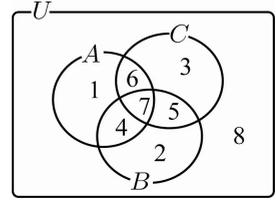


05 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여, 집합 $(A - B) \cup (B - A)$ 의 모든 원소의 합은?

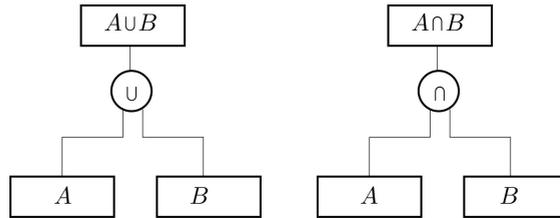


06 아래 벤 다이어그램에서 집합 $(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$ 의 원소들의 총합은?

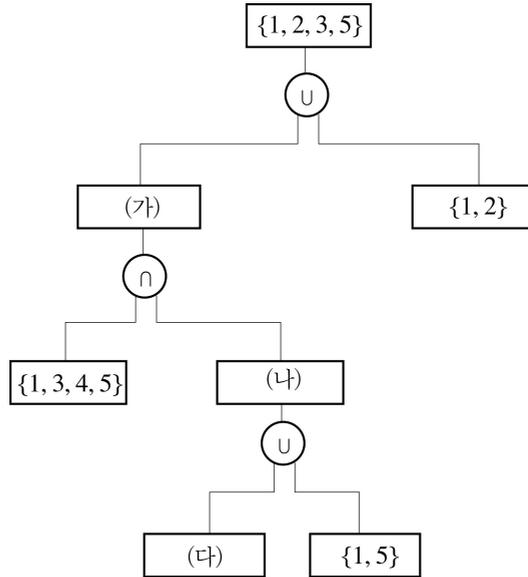
- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 11
- ⑤ 18



07 두 집합 A, B의 합집합과 교집합을 다음 그림과 같이 나타내었다.



아래 그림에서 (가)에 알맞은 것은?



- ① {1, 2, 3, 4}
- ② {1, 2, 3, 5}
- ③ {2, 3, 5}
- ④ {1, 3, 5}
- ⑤ {3, 5}

3 부분집합의 개수

1. 부분집합의 개수

집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_n\}$ ($k \leq n$)에 대하여

- (1) 집합 A 의 부분집합의 개수 $\rightarrow 2^n$ (개)
- (2) 집합 A 의 진부분집합의 개수 $\rightarrow 2^n - 1$ (개)
- (3) 집합 A 의 부분집합으로 k 개의 특정한 원소를 포함하는(또는 포함하지 않는) 부분집합의 개수 $\rightarrow 2^{n-k}$ (개)
- (4) 집합 A 의 부분집합으로 k 개의 특정한 원소 중 적어도 한 개를 포함하는 부분 집합의 개수 $\rightarrow 2^n - 2^{n-k}$ (개)

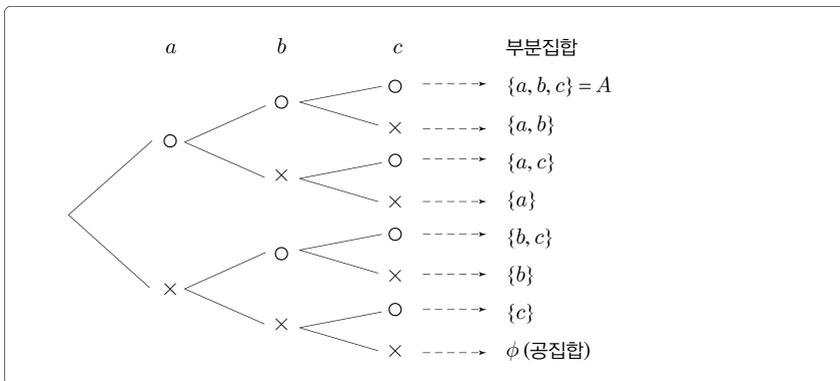
해설 (解說) 

1. 부분집합의 개수

이번에는 부분집합의 개수를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

예를 들어, 집합 $A = \{a, b, c\}$ 의 부분집합의 개수를 생각해 보면

집합 A 의 부분집합은 a, b, c 를 각각 원소로 갖는지 갖지 않는지에 따라 다음과 같이 분류할 수 있다. (단, ○는 원소로 가질 때, ×는 원소로 갖지 않을 때를 나타낸다.)



따라서 집합 $A = \{a, b, c\}$ 의 부분집합은 다음의 8개이다.

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}(= A)$$

이때 구하는 부분집합의 개수는 마지막(세 번째) 가지의 개수와 같은 2^3 개임을 알 수 있다.

이러한 생각을 일반화하면 원소의 개수가 n 개인 유한집합의 경우 마지막 가지의 개수는

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ 개}} = 2^n \text{ (개)} \quad \leftarrow 2 \text{가 } n \text{개 곱해져 있음}$$

이므로 구하는 부분집합의 개수는 2^n 개다.

또한, 진부분집합의 개수는 부분집합 중에서 자기 자신은 제외시켜야 하므로 $2^n - 1$ (개)이다.

이번에는 특정한 원소들을 포함하거나 포함하지 않는 부분집합의 개수에 대하여 예를 들어 알아보자.

$B = \{a, b, c, d, e\}$ 에서 두 원소 d, e 를 모두 포함하지 않는 부분집합은 B 에서 d, e 를 제외한 집합 $\{a, b, c\}$ 의 부분집합과 같다. 즉

- \emptyset , ← 1개
- $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ ← 3개
- $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$, ← 3개
- $\{a, b, c\}$ ← 1개

또한, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 에서 두 원소 d, e 를 모두 포함하는 부분집합은 위에서 구한 8개의 집합에 각각 두 원소 d, e 를 넣은 집합과 같다. 즉,

- $\{d, e\}$, ← 1개
- $\{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}$, ← 3개
- $\{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}$, ← 3개
- $\{a, b, c, d, e\}$ ← 1개

그러므로 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합으로서

$$d, e \text{를 모두 포함하지 않는 부분집합의 개수는 } 8 = 2^{5-2} \text{ (개)}$$

$$d, e \text{를 모두 포함하는 부분집합의 개수도 } 8 = 2^{5-2} \text{ (개)}$$

이다.

또한, B 의 부분집합으로서

$$d \text{는 포함하고 } e \text{는 포함하지 않는 부분집합의 개수도 } 8 = 2^{5-2} \text{ (개)}$$

이다.

이와 같이 생각하면 원소의 개수가 n 개인 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 에서

$$\text{특정한 원소 } k \text{개를 포함하거나 포함하지 않는 부분집합의 개수는 } 2^{n-k} \text{ (개)}$$

이다.



I 실력다지기 문제 I

부분집합의 개수

- 01** 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 중 $\{1, 2\}$ 와 서로소인 부분집합의 개수는?
 ① 0개 ② 2개 ③ 4개
 ④ 8개 ⑤ 16개
- 02** 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여 $X - A = \emptyset$,
 $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?
 ① 8 ② 16 ③ 32
 ④ 64 ⑤ 128
- 03** 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 집합 $A = \{1\}$ 을 포함하고, 집합
 $B = \{2, 3\}$ 과 서로소인 전체집합 U 의 부분집합의 개수는?
 ① 1개 ② 2개 ③ 3개
 ④ 4개 ⑤ 5개
- 04** 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $S \subset A$, $\{1, 4\} \cap S = \{4\}$ 를 만족하는 집합 S
 의 개수는?
 ① 1개 ② 2개 ③ 4개
 ④ 8개 ⑤ 16개